物理化学基礎及び演習　T16　田中庸裕担当分　　　　　　2010.4.13

問題１　次の関数の一次導関数を求めよ。(20)

(1) $x\ln x$　(2) $x^x$　(3) $\exp(x^x)$　(4) $\tan^{-1}x$

注 1 : ln とは底を $e$ とする自然対数を表す。注 2 : $\exp(x)$ とは，$e^x$ のことである。

注 3 : $x=\tan\theta$ ならば，$\theta=\tan^{-1}x$ である。

(1) $\left(x\ln x\right)'=1+\ln x$

(2) $\left(x^x\right)'=x^x\left(1+\ln x\right)$　＞　解き方：

$y=x^x$ とおくと $\ln y=x\ln x$　$\therefore\left(\ln y\right)'=\dfrac{y'}{y}=1+\ln x$　$\therefore y'=y\left(1+\ln x\right)$

(3) $\left(\exp(x^x)\right)'=\left(x^x\right)'\exp(x^x)=x^x\left(1+\ln x\right)\exp(x^x)$

(4) $\dfrac{1}{1+x^2}$

$x=\tan\theta$ として両辺を $x$ で微分すると，$1=\dfrac{\theta'}{\cos^2\theta}$

$$\therefore\theta'=\frac{1}{\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta}\right)}=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+x^2}$$

問題２　次の関数の全微分をもとめよ(10)

(1) $S\left(T,V\right)=\ln T^C V^R$　(2)　$z=x\ln y-x^2y$

注 1:$C$ および $R$ は定数である。

ヒント：(1)に関しては，$S\left(T,V\right)=C\ln T+R\ln V$ と簡単化できる。

(1) $\mathrm{d}S=\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_V\mathrm{d}T+\left(\dfrac{\partial S}{\partial V}\right)_T\mathrm{d}V=\dfrac{C}{T}\mathrm{d}T+\dfrac{R}{V}\mathrm{d}V$

(2) $\mathrm{d}z=\left(\ln y-2xy\right)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{x}{y}-x^2\right)\mathrm{d}y$

問題３　次の不定積分を求めよ（12）

(1) $\int \ln x \, \mathrm{d}x$　　　　(2) $\int \frac{1}{x^2+x} \mathrm{d}x$

(1) $\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int \mathrm{d}x = x \ln x - x$

(2) $\int \frac{1}{x^2+x} \mathrm{d}x = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \mathrm{d}x = \ln \frac{x}{x+1}$

積分定数は記入していない。

問題４　次の定積分を求めよ。(18)

ただし $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ を用いても良い

注意(1)(2)は，出題を間違ったので諸君の解答とは違うが，こちらのミスなので全員○とした。

(1) $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} \mathrm{d}x$　　　(2) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} \mathrm{d}x$　　　(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x$

(1) $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big]_0^{\infty} = 0 - \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$

(2) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} \mathrm{d}x = -\frac{x}{2} e^{-x^2} \Big]_0^{\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$

(3) $x = \tan\theta$ とすると $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}$　$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^2\theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta = \pi$

**問題５**　次の関数を $x$ の 2 次までテーラー展開せよ。(30)

(1) $e^x$　(2) $e^{-x^2}$　(3) $\sin x$　(4) $\cos x$　(5) $\ln(1-x)$　(6) $\dfrac{1}{1+x}$

(1) $e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$　(2) $e^{-x^2} \approx 1 - x^2$　(3) $\sin x \approx x$　(4) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2}$

(5) $\ln(1-x) \approx -x - \dfrac{x^2}{2}$　(6) $\dfrac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2$

**問題６**　次の等式を証明せよ（10）

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

解き方その 1)
$\ln(1+x)$ を $x=0$ の周りでテーラー展開すると，

$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots$　$x$ に 1 を代入すれば良い。

解き方その 2)
$\ln x$ を $x=1$ の周りでテーラー展開すると，

$\ln x = \ln 1 + (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{(x-1)^n}{n} + \cdots$　$x$ に 2 を代入すれば良い