2011.4.19

物理化学基礎及び演習　Ｔ１６　　　　　　　　　　　　　　田中庸裕担当

入学年＿＿＿＿＿＿＿　学生証番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

氏　名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　次の関数の全微分をもとめよ。但し，ln は自然対数，a, b, R, C は正定数である。(40)

1) $z = \dfrac{x^2}{y}\ln xy$　　2) $U = CT^4V$　　3) $P = \dfrac{RT}{V-b} - \dfrac{a}{V^2}$　　4) $S = \ln T^C V^R$

2　次の微分は完全微分か。完全微分なら不定積分を求め，不完全微分なら積分因子をもとめよ。(60)

1) $\mathrm{d}z = \boldsymbol{2}y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$　　2) $\mathrm{d}Q = C\mathrm{d}T + \dfrac{RT}{V}\mathrm{d}V$　　3) $\mathrm{d}z = 2(x+y^2)\mathrm{d}x + 4y(x+y^2)\mathrm{d}y$

以下解答欄　　裏を用いても良い

1

1) $\mathrm{d}z = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y$ だから，それぞれ微係数をもとめてやればよい。

$\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 2\dfrac{x}{y}\ln xy + \dfrac{x^2}{y}\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{y}\left(1+2\ln xy\right)$, $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\dfrac{x^2}{y^2}\ln xy + \dfrac{x^2}{y}\dfrac{1}{y} = \dfrac{x^2}{y^2}\left(1-\ln xy\right)$ だから，

$$\mathrm{d}z = \frac{x}{y}\left(1+2\ln xy\right)\mathrm{d}x + \frac{x^2}{y^2}\left(1-\ln xy\right)\mathrm{d}y$$

2) $\mathrm{d}U = 4CT^3V\mathrm{d}T + CT^4\mathrm{d}V$　あえて蛇足すれば，$\mathrm{d}U = \dfrac{4U}{T}\mathrm{d}T + \dfrac{U}{V}\mathrm{d}V$

3) $\mathrm{d}P = \dfrac{R}{V-b}\mathrm{d}T - \left(\dfrac{RT}{\left(V-b\right)^2} - \dfrac{2a}{V^3}\right)\mathrm{d}V$　　きれいになるとは限らない。

4) 対数をバラバラにすると分かり易い。$S = \ln T^C V^R = C\ln T + R\ln V$

よって，$\mathrm{d}S = \dfrac{C}{T}\mathrm{d}T + \dfrac{R}{V}\mathrm{d}V$

2011.4.19

2.

(1) $\frac{\partial}{\partial y}(2y) = 2 \neq \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$　なので　不完全微分である。

積分因子は，x となる。』（ここまでが解答）

こうすると，$\frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x$

不定積分すると，$x\mathrm{d}z = 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = \mathrm{d}(x^2 y)$

但し，もう一つ答えがある。積分因子として，$\frac{1}{xy}$ も考える事ができる。

こうすると，$\frac{\mathrm{d}z}{xy} = \frac{2}{x}\mathrm{d}x + \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \mathrm{d}(2\ln x + \ln y)$ となるのである。もっとおせっかいな事をすれば，$\frac{\mathrm{d}z}{xy} = \mathrm{d}(2\ln x + \ln y) = \mathrm{d}\ln x^2 y$

(2) $\frac{\partial}{\partial V}(C) = 0 \neq \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{RT}{V}\right) = \frac{R}{V}$　なので　不完全微分である。

積分因子は，$1/T$ となる。』（ここまでが解答）こうすると，$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{C}{T}\right) = 0 = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{R}{V}\right) = 0$

不定積分するためには，$\frac{\mathrm{d}Q}{T} = \frac{C}{T}\mathrm{d}T + \frac{R}{V}\mathrm{d}V = \mathrm{d}(C\ln T + R\ln V)$　（あれれ，１．(4)になった）

(3) $\frac{\partial}{\partial y}\left(2(x+y^2)\right) = 4y \neq \frac{\partial}{\partial x}\left(4y(x+y^2)\right) = 4y$　なので　完全微分である。

不定積分は，$\mathrm{d}z = 2(x+y^2)\mathrm{d}x + 4y(x+y^2)\mathrm{d}y = \mathrm{d}(x^2 + 2xy^2 + y^4)$ となる。